ヤン＝ミルズ場の共変な正準理論

京大・理　　九　後　汰一郎

§1. はじめに

「ヤン＝ミルズ場，或いは非アーベル群のゲージ場の理論の共変ゲージに於ける canonical operator formalism」という様な形式的な話が果して物性論の人にも役に立つ事があるかしらと思いながらも，世話人の一人の方から，「物理の一つの分野で論理的にきれいな話は，必ず他の分野でも利用されるものだ」という風におだてられて，話すハメになったのがこの話です。内容は，殆んどが小嶋君との共同の仕事[1)]で，最後の一部が畑君との仕事[2)]です。

ゲージ理論のcanonicalなoperator formalismというのは，非共変的なクーロンゲージ $\partial^i A_i=0$ や axial ゲージ $A_3=0$ を採って余分な変数を消去して物理的変数のみで話をする限り，通常のゲージ理論でない場の理論のそれと変わる所はない。ところがその様な非共変的なゲージ条件を採ると，特に非アーベル群の場合，相互作用項が non-local，かつ non-polynomial の大変複雑な形になる。これは実際の計算が大変になるばかりでなく，（素粒子の場の理論の場合には∞大の量の）くりこみがうまく出来るかどうかさえ危うくする。そこで共変的なゲージ条件 $\partial^\mu A_\mu \sim 0$ で話をする事にすれば，形式的には最も簡単で，明白に共変かつ局所的相互作用になる。しかしこの場合は，例えば，共変な交換関係

$$
\begin{aligned}
&[\, a_\mu(\vec{k}),\ a_\nu^\dagger(\vec{q})\,] = -g_{\mu\nu}\,\delta^3(\vec{k}-\vec{q}) \\
&g_{\mu\nu} = \mathrm{diag.}\,(+1,\ -1,\ -1,\ -1)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

からも伺える様に時間成分 $a_0(\vec{k})$ が負計量になり，全状態空間として不定計量を持ったものを考えざるを得なくなる。これは量子論の確率的解釈に困難をもたらす。この困難は，量子電磁気学QED（アーベル群のゲージ理論）の場合は，グプタ＝ブロイラー（ファインマンゲージの場合）に依って，有名な補助条件

$$
(\partial^\mu A_\mu)^{(+)}(x)\,|\,\mathrm{phys}\rangle = 0 \tag{1.2}
$$

で物理的な部分空間を選び出す事により解決された。即ち，補助条件 (1.2) は，$\partial^\mu A_\mu$ が free な運動方程式を満たす，

$$
\Box\,\partial^\mu A_\mu = 0, \tag{1.3}
$$

ので時間発展と consistent であり，かつ，(1.2) で選ばれる物理的状態は非負のノルムを持っている事が示されるからである。ファインマンゲージ以外の一般の共変ゲージ条件の場合への拡張は，中西＝ロートラップに依りなされた。

しかし非アーベル群のゲージ理論の場合は，$\partial^\mu A_\mu$ は最早や (1.3) の free 方程式を満たさず，グプタ＝ブロイラー＝中西＝ロートラップの補助条件をそのまま真似てはうまく行かなくなる。他方，これと独立に経路積分の方法を用いて，従って直接 operator や状態というものを議論しないで，共変ゲージの場合の，ダイアグラムの規則，ユニタリ性，くりこみ可能性という点について相当明らかにされていた。特に Faddeev-Popov のお化けの場，スカラーだが fermi 統計に従うという場が，物理的 S －行列のユニタリ性に必要だという事が明らかにされていた。従って，operator formalism を作ろうという際には，適当な補助条件を見つけて，それで同時に Faddeev-Popov のお化けの粒子も物理的状態に出て来ない様禁止しなければならない。実際にその様な operator formalism が作れる事，しかもその補助条件は大変簡単なもので，豊富な内容を持っている事，等を示すのが本稿の目的である。

目次は

§2. ゲージ不変性 — BRS 対称性

§3. 補助条件

§4. “非物理的粒子”の閉じ込めの一般論

4.1. BRS 代数の表現

4.2. Quartet 表現とその decoupling

§5. ゲージ理論の統計力学

(できるだけ易しく書いたつもりなので専門外の方にも読んで頂けると幸です。)

§2. ゲージ不変性 — BRS 対称性

次の様な Lagrangian を考えよう：

$$\mathscr{L}_S(A,\psi) = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathscr{D}_\mu - m)\psi, \tag{2.1a}$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu, \tag{2.1b}$$

$$\mathscr{D}_\mu \psi = (\partial_\mu - igA^a_\mu T^a)\psi. \tag{2.1c}$$

ここで考えているゲージ群 G はコンパクト群なら何でも良いが簡単な為 $G = \mathrm{SU}(N)$ 位にしておこう。表現行列 T^a ($a = 1, 2, \cdots, N^2-1$) は交換関係

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

を満たし，f^{abc}は(群$G=SU(N)$の)構造定数である。[$G=SU(2)$なら，基本表現の場合，T^aは良く知られたパウリ行列で$T^a=\tau^a/2$となり，$f^{abc}=\epsilon^{abc}$である。$G=SU(3)$の場合は，(2.1)は量子色力学(QCD)のLagrangianそのもの。] (2.1)のLagrangianは，そもそもその構成から，次の局所ゲージ変換

$$\begin{cases} \delta_\theta A_\mu^a(x) = \partial_\mu \theta^a(x) + g f^{abc} A_\mu^b(x)\, \theta^c(x) \equiv (D_\mu \theta(x))^a \\ \delta_\theta \phi(x) = i g \theta^a(x)\, T^a \phi(x) \end{cases} \tag{2.2}$$

の下で不変である。$\theta^a(x)$ ($a=1, 2. \cdots, N^2-1$)は任意のxー依存の変換パラメータである。この局所的ゲージ不変性がある為に，量子論へ移行する際には，量子電磁気学(QED)の場合と同様，我々は先ずゲージを固定しなければならない。それで量子論のLagrangianとして

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(A, \phi) + \mathscr{L}_{\text{ゲージ固定}} + \mathscr{L}_{\mathrm{FP}} \tag{2.3}$$

$$\mathscr{L}_{\text{ゲージ固定}} = -\partial^\mu B^a \cdot A_\mu^a + \frac{\alpha}{2} B^a B^a, \tag{2.4a}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{FP}} = -i \partial^\mu \bar{c}^a \cdot (D_\mu c)^a, \tag{2.4b}$$

を採る。B^aはゲージ固定の為の Lagrange multiplier 場であり，$\mathscr{L}_{\mathrm{FP}}$は有名な Faddeev-Popov(FP)のgauge-compensating項で，$c^a(x)$と$\bar{c}^a(x)$はFPーお化けと呼ばれ，スカラー場だがfermi統計に従うとして量子化する。$\mathscr{L}_{\text{ゲージ固定}}$の為に(2.3)は最早や局所ゲージ変換(2.2)の下で不変ではないが，しかしその充分な情報を残している。即ち，$\mathscr{L}_{\mathrm{FP}}$項のおかげで，(2.3)は，次の変換— Becchi-Rouet-Stora(BRS)変換と呼ばれる—

$$\delta A_\mu^a(x) = \lambda (D_\mu c(x))^a \tag{2.5a}$$

$$\delta \phi(x) = i \lambda g c^a(x)\, T^a \phi(x) \tag{2.5b}$$

$$\delta c^a(x) = -\frac{1}{2} \lambda g f^{abc}\, c^b(x)\, c^c(x) \tag{2.5c}$$

$$\delta \bar{c}^a(x) = i \lambda B^a(x) \tag{2.5d}$$

$$\delta B^a(x) = 0 \tag{2.5e}$$

の下で不変である。ここにλは，FPお化けc，$\bar{c}$と反可換な(Grassmann数の) 変換のパラメータである。このBRS変換は，ゲージ場A^a_μとフェルミオン$\psi(x)$に対しては，元の局所ゲージ変換 (2. 2) と本質的には同じである事に注意されたい。(2. 2) での変換のパラメーター $\theta^a(x)$を，$\lambda c^a(x)$ に置き替えれば (2. 5 a, b) になる。局所ゲージ変換の x ー依存性をFPお化け場$c^a(x)$に背負わせ，(2. 5) のBRS変換自身のパラメーター λ は xに依らない 1-parameter の変換となる。このBRS 不変性に対応して一ケの保存流がNoetherの定理に従って存在する：

$$J^{\mathrm{B}}_\mu = B^a(D_\mu c)^a - (\partial_\mu B^a)\, c^a + \frac{i}{2}\, gf^{abc}(\partial_\mu \bar{c}^a)\, c^b c^c - \partial^\nu (F^a_{\mu\nu} c^a). \tag{2. 6}$$

これに対応するcharge (BRS charge)

$$Q_{\mathrm{B}} = \int d^3x\, J^{\mathrm{B}}_0(x) \tag{2. 7}$$

は保存し，かつBRS変換を引き起す生成子になっている：

$$[\, i\lambda Q_{\mathrm{B}},\ \Phi(x)\,] = \delta\Phi(x),\quad \Phi = A_\mu, \psi,\ c,\ \bar{c},\ B, \tag{2. 8}$$

このBRS charge の著しい性質は，次の巾零性である：

$$Q_{\mathrm{B}}^2 = 0. \tag{2. 9}$$

この巾零性の為に任意の演算子Φの 2回BRS変換はゼロとなる：

$$\begin{aligned}\delta_2\delta_1\Phi &= [\, i\lambda_2 Q_{\mathrm{B}},\ [\, i\lambda_1 Q_{\mathrm{B}},\ \Phi\,]\,] \\ &= \lambda_1\lambda_2\,[\, Q_{\mathrm{B}}^2,\ \Phi\,] = 0.\end{aligned}$$

(2. 9) の巾零性が，全ての非物理的粒子 (例えば，A^a_μの縦波やスカラー成分，或いはFPお化け c，$\bar{c}$) が物理的な世界に出て来ない事を保障するのに決定的な役割を果たす。

ついでにFPお化けの charge Q_{c}を導入しておく。(2. 3)のLagrangian は，FPーお化けのスケール変換 $c \to \rho c$，$\bar{c} \to \rho^{-1}\bar{c}$に対して明らかに不変なもので，それに対応して，ネター流

$$J^{\mathrm{c}}_\mu = i[\, \bar{c}^a(D_\mu c)^a - (\partial_\mu \bar{c})^a c^a] \tag{2. 10}$$

が存在する。この保存 charge $Q_{\mathrm{c}} = \int d^3x\, J^{\mathrm{c}}_0(x)$ は，勿論FP お化けのスケール変換の生成子となる：

$$[\, iQ_{\mathrm{c}},\ c\,] = c,\quad [\, iQ_{\mathrm{c}},\ \bar{c}\,] = -\bar{c}. \tag{2. 11}$$

FP－お化け c，$\bar{c}$はそれぞれ実（hermitian），

$$c^a(x)^\dagger = c^a(x), \quad \bar{c}^a(x)^\dagger = \bar{c}^a(x), \tag{2. 12}$$

としてやらないと理論全体が consistent にならない[*]ので，FP－お化けの位相変換$c \to e^{i\theta}c$，$\bar{c} \to e^{-i\theta}\bar{c}$は定義できず，上のスケール変換のみ意味がある事に注意されたい。この事情で，FP－お化けの粒子数演算子N_{FP}は，（一見奇妙だが）

$$N_{\mathrm{FP}} = iQ_{\mathrm{c}}$$

という風に反エルミート（$N_{\mathrm{FP}}^\dagger = -N_{\mathrm{FP}}$）演算子として与えられる。実際，（2. 11）からFP－お化け c と $\bar{c}$ は$N_{\mathrm{FP}} = +1$と-1をそれぞれ持つ事が判る。

§3. 補助条件

我々のゲージ理論の system（2. 3）に於いては，QED以来の明らかに非物理的な縦波やスカラー成分，それに加えて，FP－お化けの様な粒子が全状態空間$\mathcal{V}$の中に現われているので，その中から，物理的な状態をうまく選び出さねばならない。この物理的部分空間$\mathcal{V}_{\mathrm{phys}} = \{|\,\mathrm{phys}\rangle\}$を特定する補助条件として

$$Q_{\mathrm{B}}\,|\,\mathrm{phys}\rangle = 0 \tag{3. 1}$$

なる条件を置く事にする。この条件は，直観的に言えば，BRS charge Q_{B}がBRS変換≈局所ゲージ変換の生成子であるから，「物理的状態 | phys＞はゲージ不変なもの」という要請という事になる。実際に，この補助条件で，一般の（非アーベル群）ゲージ理論に対してうまく行く事を次節に述べるが，その前に，QEDの（様なアーベル群ゲージ理論）場合の有名なグプタ＝ブロイラーの補助条件（或いはその一般化の中西＝ロートラップの補助条件[**]），

$$(\partial^\mu A_\mu)^{(+)}(x)\,|\,\mathrm{phys}\rangle' = 0 \quad (B^{(+)}(x)\,|\,\mathrm{phys}\rangle' = 0)^{**)} \quad \text{for all } x \tag{3. 2}$$

と，我々の（3. 1）とがどういう関係にあるかを述べよう。アーベル群の場合，構造定数f^{abc}は零である為に，場$B(x)$，$c(x)$，$\bar{c}(x)$は全く freeの運動方程式

---

*）例えば，Lagrangian（2. 3）は，（2. 12）として初めてエルミートである。又 Q_{B}やQ_{c}もエルミート：$Q_{\mathrm{B}}^\dagger = Q_{\mathrm{B}}$，$Q_{\mathrm{c}}^\dagger = Q_{\mathrm{c}}$。

**）B－変分から出る運動方程式 $\partial^\mu A_\mu = -\alpha B$に注意。

$$\Box B(x)=\Box c(x)=\Box \bar{c}(x)=0 \tag{3. 3}$$

を満たす。従ってHeisenberg場のレベルで

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_k (B_k f_k(x) + B_k^\dagger f_k^*(x)) \\ c(x) &= \sum_k (c_k f_k(x) + c_k^\dagger f_k^*(x)) \end{aligned} \tag{3. 4}$$

の如く，平面波(or波束，$f_k(x)$ は $\Box f_k(x)=0$ の正振動解)のモードに展開できる。又，BRS charge Q_{B} (2. 6, 7) は，$f^{abc}=0$ なので，今の場合簡単になり，

$$Q_{\mathrm{B}}=\int d^3x [B\partial_0 c-(\partial_0 B)c]=i\sum_k (c_k^\dagger B_k - B_k^\dagger c_k) \tag{3. 5}$$

で与えられる。更にFP－お化け c，$\bar{c}$ が全くfreeだという事は，FP－お化けが最初存在しなければ永久に作られないという事だから，FP－お化けのない部分空間

$$\mathcal{V}'\otimes|0\rangle_{\mathrm{FP}} \quad \text{in}\ \mathcal{V} \tag{3. 6}$$

は時間発展に不変である。ここに $\mathcal{V}'$ はFP－お化け以外のモードで張られる状態の空間であって，通常のQEDで(FP－お化けなぞ持ち込まないで)議論される空間に他ならない。さて，我々の補助条件(3. 1)で選ばれる(3. 6)のセクターでの物理的状態は，$c_k|0\rangle_{\mathrm{FP}}=0$ だから，

$$Q_{\mathrm{B}}[\,|\text{phys}\rangle'\otimes|0\rangle_{\mathrm{FP}}]=\sum_k (B_k|\text{phys}\rangle')\otimes|c_k\rangle_{\mathrm{FP}}=0$$

を満たす。ところが $|c_k\rangle_{\mathrm{FP}}\equiv c_k^\dagger|0\rangle_{\mathrm{FP}}$ は各 k について独立だから，これは

$$B_k|\text{phys}\rangle'=0$$

が全ての k について成立する事を要求する。これは中西＝ロートラップの補助条件(3. 2)，$B^{(+)}(x)|\text{phys}\rangle'=0$ for all x，と同じである。即ち，我々の補助条件(3. 1)は，QED(アーベリアン)の特殊な条件(i，e.，(3. 6)のセクターに話を限れるという条件)の下では，グプタ＝ブロイラー＝中西＝ロートラップの条件と同等になり，この意味で，QEDの彼らのformalismの大変自然な拡張である事が判る。

§4. “非物理的粒子”の閉じ込めの一般論

4.1　BRS代数の表現

我々の補助条件(3.1)，$Q_B\,|\mathrm{phys}>=0$，で特定される物理的空間$\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$では，非物理的粒子が出て来ない事，もっと正確には，出ては来るが零ノルムの組み合わせでしか現れず，決して観測にかからないという事を一般的に示そう。

先ず，BRS-charge Q_BとFP－お化けのcharge Q_cの簡単な代数

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\{Q_B,\ O_B\}=Q_B^2=0 & (4.1\mathrm{a}) \\ [\,iQ_c,\ Q_B\,]=Q_B & (4.1\mathrm{b}) \\ [\,iQ_c,\ Q_c\,]=0 & (4.1\mathrm{c}) \end{cases}$$

に注意する。(4.1a)は前述の重要なQ_Bの巾零性であり，(4.1bとc)は単にQ_BとQ_cが，FP－粒子数をそれぞれ$N_{FP}=+1$と0を持つという式である。さて，全ゆる粒子は，物理的であれ非物理的であれ，又“素”粒子であれ結合状態であれ，全て代数(4.1)の表現になっている。全状態空間$\mathcal{V}$を，漸近場で張られるFock空間と仮定すれば，1粒子状態のみを調べれば充分なので，代数(4.1)の1粒子状態での表現を調べれば良い。

代数(4.1)の表現は大変簡単で，Q_Bの巾零性から，doubletかsingletしかない事が判る。即ち，doubletは

$$|k,N> \xrightarrow{Q_B} Q_B\,|k,N> \equiv |k,N+1> \neq 0 \xrightarrow{Q_B} 0 \qquad (4.2)$$

（ここに，NはFP－粒子数，kはその他の運動量，質量，スピン等の量子数）

なる組$\{\,|k,N>,\ \ |k,N+1>\}$であり，singletは，

$$Q_B\,|k,N>=0 \qquad (4.3)$$

を満たし，かつ，$Q_B\,|*>=|k,N>$となる様な状態$|*>$がないという様な状態$|k,N>$の事である。次に，doubletは必ず“FP－共軛”な相棒があって，常に2つのdoubletが対になって現れる事を示そう。図式的に書くと，

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cc} \text{親} & \text{子} \\ |k,N> \xrightarrow{Q_B} & |k,N+1> \end{array}} \\ \text{元の doublet} \qquad \updownarrow\ \text{FP－共軛} \\ \boxed{|k,-(N+1)> \xrightarrow{Q_B} |k,-N> \neq 0} \\ \text{相棒の doublet} \end{array} \qquad (4.4)$$

となる。先ず，元のdoubletの“子供”の方$|k, N+1>$に“FP－共軛”な(即ち，FP－粒子数が逆符号の)相棒$|k, -(N+1)>$の状態が存在しなければならない事は，doublet表現の“子供”の方の状態が零ノルムである事，

$$<k, N+1|k, N+1> = <k, N|Q_B Q_B|k, N> = 0 \tag{4.5}$$

から従う。何故なら，零ノルムの状態$|k, N+1>$の存在が，少くとも理論の中で認知される為には，

$$<*|k, N+1> \neq 0 \tag{4.6}$$

である様な状態$|*>$の存在が必要であり，しかもこの状態$|*>$は，FP－粒子数が$-(N+1)$の状態でなければならない*)からである。この状態$|*>$は規格化を除いて一意的であり，それが上に言った相棒$|k, -(N+1)>$である。次にこの$|k, -(N+1)>$がdoublet表現の“親”になっている事は，その“子”$Q_B|k, -(N+1)> \equiv |k, -N>$が零でない事を言えば良い。これは，等式

$$\begin{aligned} <k, -N|k, N> &= <k, -(N+1)|Q_B|k, N> \\ &= <k, -(N+1)|k, N+1> \neq 0 \ [\text{by}(4.6)] \end{aligned} \tag{4.7}$$

から判る。これで，doublet表現は，常に(4.4)の図式で表わされる様な対で現われねばならない事が言えた。以後，この1対のdoubletsを簡単にquartetと呼ぶ事にする。

singlet表現の方も，FP－粒子数が$N\neq 0$の場合は$|k, +N>$と$|k, -N>$の1対のsinglets(singlet pairと呼ぶ)で現われねばならない事が同様に言える。しかしこの(4.1)の代数の表現としては許されるsinglet pair表現は，実は存在し得ないという事が，BRS変換の元の具体的な形(2.5)に立ち入った考察に依って中西に依り証明された。[3)]**) 従って，singlet表現は$N=0$, FP－粒子数を持たないもののみとなる。このsinglet表現$|k, N=0>$に属する粒子の生成演算子を

*) この事は，反エルミート演算子$N_{FP}=iQ_c$の行列要素に対する式，
$<k, N'|iQ_c|k, N> = N<k, N'|k, N> = -N'<k, N'|k, N>$,
から出る$(N+N')<k, N'|k, N>=0$の式から明らか。

**) 漸近場に関しては，Heizenberg場からlimitをとる必要があり，weak limitより強いlimitを要する点で若干問題点は残る。

$$\phi_k^\dagger|0> = |k, N=0> \tag{4. 8}$$

で定義すれば， singlet だから$Q_B|k, N=0>=0$ なので，

$$[Q_B, \phi_k^\dagger]=0 \tag{4. 9}$$

が従う。この様な粒子が任意個存在する状態$\phi_{k_1}^\dagger \phi_{k_2}^\dagger \cdots\cdots \phi_{k_n}^\dagger |0>$は$Q_B|\text{phys}>=0$の補助条件を満たすので，物理的空間$\mathcal{V}_{\text{phys}}$に自由に現われる粒子である事が判る。即ち singlet は物理的粒子である。物理的粒子が全て正の計量を持つ事，i，e.，

$$[\phi_k, \phi_\ell^\dagger]_\mp=+\delta_{k\ell} \tag{4. 10}$$

は，勿論(4. 1)の代数のみで保証できることではなく，扱うモデル及びその dynamics の問題であり，個々のモデルで確かめねばならない。それ故，ここでは(4. 10)を単に仮定しておく。

4.2 Quartet 表現とその decoupling

さて，残りの表現 quartet (=doublet pair)の考察に移る。この表現に属する粒子が物理的空間$\mathcal{V}_{\text{phys}}$では零ノルムの組み合わせでしか現われ得ない事を示すのがこの節の目的である。

図式(4. 4)の quartet 状態に対して生成演算子をそれぞれ次の様に導入する*)。

$$\begin{array}{lcl} |k, N> \equiv \chi_k^\dagger|0> \quad , & & -|k, -N> \equiv \beta_k^\dagger|0> \quad , \\ \quad\big\downarrow Q_B & & \quad\big\uparrow Q_B \\ i|k, N+1> \equiv \gamma_k^\dagger|0> \quad , & & -|k, -(N+1)> \equiv \bar{\gamma}_k^\dagger|0> \quad , \end{array} \tag{4. 11}$$

先ず，quartet member 間の BRS 変換の定義と$Q_B^2=0$から，

$$\left.\begin{array}{l}[Q_B, \chi_k]=-i\gamma_k \\ \{Q_B, \bar{\gamma}_k\}=\beta_k\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{l}\{Q_B, \gamma_k\}=0 \\ [Q_B, \beta_k]=0\end{array}\right) \tag{4. 12}$$

がすぐ出る。次に，χ，β，はFP－粒子数が偶，γ，$\bar{\gamma}$が奇なので$[\chi, \bar{\gamma}^\dagger]=[\beta, \bar{\gamma}^\dagger]=0$は明らかだが，それと(4. 12)から

$$0=\{Q_B, [\chi, \bar{\gamma}^\dagger]\}=-i\{\gamma, \bar{\gamma}^\dagger\}+[\chi, \beta^\dagger] \tag{4. 13a}$$

$$0=\{Q_B, [\beta, \bar{\gamma}^\dagger]\}=[\beta, \beta^\dagger] \tag{4. 13b}$$

---

*) Nは偶数とした。これは，必要なら2つの doublet の入れ換えで，常に可能。

が従う。これからquartetのメトリック（交換関係）が（適当に規格化を行なって）次の様に決まる：

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \chi_\ell^\dagger & \beta_\ell^\dagger & \gamma_\ell^\dagger & \bar{\gamma}_\ell^\dagger \end{array} \\
\begin{array}{c} \chi_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \\ \bar{\gamma}_k \end{array}
\left[\begin{array}{cc:cc}
\omega_{k\ell} & -\delta_{k\ell} & 0 & 0 \\
-\delta_{k\ell} & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & i\delta_{k\ell} \\
0 & 0 & -i\delta_{k\ell} & 0
\end{array}\right]
\end{array}
\equiv \eta_{k\ell} \equiv [\Phi_k,\ \Phi_\ell^\dagger]_\mp \tag{4. 14}
$$

（quartetの粒子をひっくるめてΦで表わす。）

ここで$\omega_{k\ell} \equiv [\chi_k,\ \chi_\ell^\dagger]$は今の話からは決まらないが後の話では特定する必要のない量である。(4. 14)の行列要素で，$[\beta_k,\ \beta_\ell^\dagger]=0$以外のゼロは全てFP−粒子数が合わないという事から従うものである。(4. 13a)に依る$[\chi_k,\ \beta_\ell^\dagger]=i\{\gamma_k,\ \bar{\gamma}_\ell^\dagger\}=-\delta_{k\ell}$のメトリックの対応が，以下で最も重要な点になる。［実際(4. 13a)はWard-Takahashi恒等式の最も凝縮された表現になっている。］

どの様なquartetのどのメンバーも$\mathcal{V}_{\rm phys}$では観測されない事を示す為に，少し準備が必要である。全状態空間$\mathcal{V}$は仮定に依りFock空間で，物理的粒子（singlet）ϕ_αとquartet粒子$\Phi_k=(\chi_k,\ \beta_k,\ \gamma_k,\ \bar{\gamma}_k)$とから構成される。その$\mathcal{V}$をquartet粒子を含む個数に従ってセクターに分ける。quartet粒子を合計nケ（物理的粒子は任意個）含む様な状態のセクターを$\mathcal{V}^{(n)}$と記し，そこへの射影演算子を$P^{(n)}$と呼ぶ。$\mathcal{V}^{(0)}$は従って物理的粒子のみで張られる空間で（仮定により）正定値メトリックを持つ。$\mathcal{V}^{(0)}$への射影演算子は

$$
P^{(0)}=\sum_\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|=\sum_m\frac{1}{m!}[\phi_{\alpha_1}^\dagger\cdots\phi_{\alpha_m}^\dagger|0\rangle\langle 0|\phi_{\alpha_m}\cdots\phi_{\alpha_1}] \tag{4. 15}
$$

である。少し考えれば，$P^{(n)}\ (n\geqq 1)$が，

$$
\begin{aligned}
P^{(n)}&=\frac{1}{n!}\Phi_{k_1}^\dagger\cdots\Phi_{k_n}^\dagger|\alpha\rangle\eta_{k_1\ell_1}^{-1}\cdots\eta_{k_n\ell_n}^{-1}\langle\alpha|\Phi_{\ell_n}\cdots\Phi_{\ell_1}=\frac{1}{n}\Phi_k^\dagger P^{(n-1)}\eta_{k\ell}^{-1}\Phi_\ell \\
&=\left(\frac{1}{n}\right)\left[\left(-\beta_k^\dagger P^{(n-1)}\chi_k+i\gamma_k^\dagger P^{(n-1)}\bar{\gamma}_k-\frac{1}{2}\omega_{k\ell}\beta_k^\dagger P^{(n-1)}\beta_\ell\right)+h.c.\right]
\end{aligned} \tag{4. 16}
$$

となる事がすぐ判る。ここに$\eta_{k\ell}^{-1}$は(4. 14)のメトリック行列の逆行列である。(4. 16)の表式と(4. 12)から

$$[Q_B, P^{(n)}]=0 \quad (n\geqq 0) \tag{4.17}$$

を帰納法で示せる。(最初の$[Q_B, P^{(0)}]=0$は, (4.15)と$[Q_B, \phi_\alpha]=0$から$Q_B P^{(0)}=P^{(0)}Q_B=0$が出るので言える。)この(4.17)と(4.12), (4.16)から, 次の重要な表式

$$P^{(n)}=\{Q_B, R^{(n)}\} \quad (n\geqq 1) \tag{4.18}$$

$$R^{(n)}=(\frac{1}{n})[(\overline{\gamma}_k^\dagger P^{(n-1)}\chi_k+\frac{1}{2}\omega_{k\ell}\beta_k^\dagger P^{(n-1)}\gamma_\ell)+h.c.] \tag{4.19}$$

が出る。ここでは$R^{(n)}$の具体的な式よりも, $P^{(n)}$ $(n\geqq 1)$がQ_Bと$^\exists R^{(n)}$との反交換子の形に書けるという事が本質的である。この形(4.18)の為に, 物理的空間$\mathcal{V}_{\rm phys}$の任意の状態$^\forall|f>$, $^\forall|g>$に対して, $Q_B|f>=Q_B|g>=0$だから,

$$<f|P^{(n)}|g>=0 \quad \text{for} \quad n\geqq 1 \tag{4.20}$$

が判る。この式がquartet粒子のdecouplingを言っているのである。

実際, 任意の$\mathcal{V}_{\rm phys}$の状態$|f>$をquartet粒子を含む数に従って分解しよう：

$$|f>=P^{(0)}|f>+P^{(1)}|f>+P^{(2)}|f>+\cdots \tag{4.21}$$

この展開で$P^{(1)}|f>$以降は, quartet粒子を1個以上含む成分だが, (4.20)式に依り全て零ノルムである。従ってquartet粒子は見えない。$|f>$のノルムはquartetを含まない成分$P^{(0)}|f>$だけで決定され正定値である。(これで物理的確率解釈が出来るようになる。)物理的Sー行列(即ち, 物理的粒子のみを見ている場合のSー行列)のユニタリ性も, すぐ判る。今, 散乱の前の状態|initial>が$\mathcal{V}_{\rm phys}$の元だとすると散乱後の状態|final>も$\mathcal{V}_{\rm phys}$に属する。これはBRS-charge Q_Bが保存するからである。この終状態|final>を(4.21)の様に展開すると, quartet粒子を含む成分$P^{(n)}$|final>$(n\geqq 1)$は一般には零ではない。|initial>がたとえquartet粒子を全然含まなかったとしても散乱過程で(例えばFPーお化けの対生成等によって)quartet粒子が作られ$P^{(n)}$|final>$\neq 0$となる。しかし, これは上に見た様に零ノルムである。即ち, quartet粒子は作られるがzero-normの組み合わせで観測にかからない。従って物理的粒子のみを見ている時でも確率保存が保障され, 物理的Sー行列のユニタリ性が結論される。*)

以上でこの節の目的は達したが, quartet粒子とは具体的にはどんな例があるかについて簡単に述べておこう。QEDや(摂動論の)ヤン＝ミルズ場の場合は, ゲージ場A_μの縦波成分A_L

*) この結論の為には, 全空間$\mathcal{V}$でのSー行列のユニタリ性が勿論必要。

とスカラー成分$A_S=B$がそれぞれquartetのχとβになり，FP－お化けcと$\bar{c}$が，そのquartetのγと$\bar{\gamma}$になっている。ゲージ場が自発的対称性の破れでmassiveになるHiggs模型に於いては，ゲージ場の縦波成分は勿論物理的になるので，その代りに，非物理的なGoldstone粒子がquartetのβになる。bound stateがquartet表現になる例として，QCDに於けるchiral $U(1)$ Goldstone 粒子がそれでなければならないという議論がなされている。又，QCDに於けるquarkやgluonの閉じ込めも，bound stateの形成に依って，quarkやgluon自身がquartetのメンバーになって観測され得ないという形で実現されているのかも知れない。

§ 5. ゲージ理論の統計力学[2),4)]

シンポジウム当日には，我々のformalismの応用として，“ゲージ理論の統計力学”というのを話したが，紙数の関係でstoryのみを記す事にする。[詳しくはRef. 2)を参照下さい。]
ゲージ理論で共変なゲージ条件の場合，分配函数に対するGibbsの公式

$$Z(\beta)=\mathrm{Tr}\,e^{-\beta H} \tag{5.1}$$

は，非物理的粒子(quartet)の状態迄trace和に入いってくるので正しくなくなる。正しいのは勿論

$$Z(\beta)=\mathrm{Tr}\,(P^{(0)}\,e^{-\beta H}) \tag{5.2}$$

で，quartetを含まない物理的粒子のみの張る空間への射影演算子$P^{(0)}$を含んでいる。ところが$P^{(0)}$は大変難しい概念で，その閉じた表式を元の場の量で書く事が出来ず，しかも(5.2)のままでは温度グリーン函数を使ったダイアグラム技法が全然使えない。ところが，前節で重要な役割を果たした(4.18)を利用すれば，簡単なトリックで(5.2)は

$$Z(\beta)=\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H-\pi Q_c})$$

に等しい事が示せる。Q_cは(2.10)のFP－お化けのchargeである。又任意のゲージ不変な演算子$\mathcal{O}$について

$$\mathrm{Tr}\,(P^{(0)}\,e^{-\beta H}\mathcal{O})=\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H-\pi Q_c}\mathcal{O})$$

が同様に言えるので結局，ゲージ理論の平衡系の統計演算子は$\rho=e^{-\beta H-\pi Q_c}$であるという事が出来る。この簡単な統計演算子だとダイアグラム技法が分配函数や久保公式等の評価に使える事になる。しかも実は，$-\pi Q_c$の部分は，

$$-\pi Q_c = (i\pi/\beta)(iQ_c) = \mu_{FP} N_{FP}$$

と書けば，FPーお化けに対する chemical potential μ_{FP}が純虚数 $i\pi/\beta$ で入いっていると見做せるので，その効果は単に，FPーお化けの温度グリーン函数を（fermi 統計に従うが）周期的なものにとっておくだけで採り入れられる。

我々の formalism は，その他，quark confinement や Higgs 機構に対するいくつかの一般的な結論を出したり，U(1) 問題，Weinberg-Salam 理論での charge universality，等の問題にも有用である（事もある？）ので，それらに興味ある方は，Ref. 1) 或いはその引用文献を是非お読み下さい。

参 考 文 献

1) T. Kugo and I. Ojima, Prog. Theor. Phys. Supplement, 66 (1979).
2) H. Hata and T. Kugo, Phys. Rev. **D21** (1980), 3333.
3) N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **62** (1979), 1385.
4) 素研の 1980 年 5 or 6 月号の「素粒子物理学に於ける場の理論研究会」報告にも解説があります。

素粒子物理学におけるクォーク閉じ込めの課題*)

京大・基研　　益 川 敏 英

§1. 閉じ込め問題の素粒子物理学における位置

0） quark conf. は quark が実験的に未発見だからと云うことのみの理由で必要なのではない。

それは，今日の非常に豊富な実験事実を統一的に理解しうる，今日知られている唯一の hadron 描像である。

（i） mag. mom. ⇒ hadron 中の quark の有効質量軽い。（u,d–quark; 約 3 分の 1 核子質量）

⇨実効的には quark は軽くて強くない束縛状態として hadron を作っている。

*）当日の話に多少筆を加えた部分がある。また当日の内容を文章にすると少々長くなるので，読み辛くなると思うが個条書きで御許し頂くこととした。